REDUÇÃO NO USO DE MATÉRIA-PRIMA EM EMBALAGENS DE COSMÉTICOS ATRAVÉS DA MINIMIZAÇÃO DA ÁREA SUPERFICIAL

Suzana Lima de Campos Castro [1]

Marcelo Carlos Falcão Meneghetti [2]

RESUMO. *A quantidade de matéria-prima utilizada na produção da embalagem de um produto está relacionada ao design e, em especial, à sua forma geométrica. Neste trabalho propomos uma estratégia para reduzir a quantidade de material de uma embalagem de cosméticos, sem afetar seu volume nem sua forma geométrica original. Para isso, utilizamos otimização matemática para determinar as dimensões que minimizam área superficial de embalagens, mantendo a geometria e o volume dos produtos. Essa estratégia foi aplicada a duas embalagens de cosméticos e adaptada em protótipos virtuais, para efeito tanto de visualização do design existente, quanto de projeção da redução dos resíduos em escala.*
PALAVRAS-CHAVE: *Otimização, Área Superficial, Volume, Embalagens, Economia de matéria-prima.*

ABSTRACT. *The amount of raw material used in the production of the packaging of a product is related to the design and, in particular, to its geometric shape. In this work we propose a strategy to reduce the amount of material in a cosmetic package, without affecting its volume or its original geometric shape. For this, we use mathematical optimization to determine the dimensions that minimize the surface area, of packaging, maintaining the geometry and volume of the products. This strategy was applied to two cosmetic packages and adapted in virtual prototypes, for both the visualization of the existing design and the projection of the reduction of waste in scale.*
KEYWORDS: *Optimization, Surface area, Volume, Packaging, Raw Material.*

[1]suzana@sumanalytics.com.br
[2]marcelo@sumanalytics.com.br

1 Introdução

O *design* de uma embalagem envolve o equilíbrio entre variáveis estéticas, econômicas e de usabilidade. Deve atrair, informar, agregar o máximo valor com o mínimo custo e ser amigável ao usuário. A embalagem é também um rastro ecológico compartilhado entre empresa e consumidor, que se multiplica pelo número de unidades vendidas.

Neste trabalho, incluímos mais uma variável ao *design* da embalagem, que batizamos de "matematicamente ótima'. Essa variável foi aplicada a duas embalagens muito usuais de produtos cosméticos e adaptada em protótipos virtuais para efeito de visualização do *design* existente.

A ideia é obter mais com menos. Ou neste caso, obter o mesmo com menos. Para isso, o primeiro passo foi analisar a estrutura geométrica das embalagens dos produtos a partir das dimensões principais, do volume e da área superficial. Este último parâmetro - área superficial - corresponde à quantidade de material necessária para produção da embalagem.

Nossa proposta, então, foi encontrar a dimensão que, com a mesma estrutura geométrica e com o mesmo volume, tenha a área superficial mínima (ou menor que a atual).

Foram escolhidos dois produtos de geometria mais simples para demonstrar a viabilidade da proposta.

Formatos mais complexos também são viáveis, porém envolvem determinar equações que os representem. Estas, por sua vez, dependem do desenho industrial preciso, cujas medidas não são obtidas com fita métrica.

As ferramentas, processos e modelos matemáticos utilizados, bem como as estimativas estão detalhadas na seção Otimização da área Superficial de Embalagens. As projeções de economia de matéria-prima (e resíduos) estão detalhadas na seção Resultados.

2 Otimização da área Superficial de Embalagens

Para aplicarmos a estratégia proposta, de minimização da área superficial, mantendo a geometria e o volume original de uma embalagem, escolhemos dois tipos de embalagens bastante usuais em cosméticos: uma cilíndrica, denominada neste trabalho Modelo 1, e outra do tipo cilindro prensado no topo, denominada neste trabalho de Modelo 2.

Escolhemos duas embalagens de produtos reais da marca Natura (www.natura.com.br) para os dados numéricos e os cálculos reais de otimização e análise de redução de área superficial e de matéria-prima, nos dois Modelos.

2.1 Otimização da área Superficial de uma embalagem do Modelo 1

Consideramos como Modelo 1, uma embalagem com o formato geométrico de um cilindro, muito comum nas embalagens de cosméticos. Para os cálculos, escolhemos a embalagem do Shampoo de Copaíba da marca Natura, apresentada na Figura 1.

Figura 1: Produto utilizado como Modelo 1 de embalagem para otimização

Consideramos o modelo simplificado da embalagem cilíndrica, de altura H e raio R, sem a tampa e sem o bico de vazão. Supomos que a base é um círculo de raio R e o topo é um anel circular, de raio maior R e raio menor R_{bico} onde estaria o bico de vazão, conforme apresentado na Figura 2.

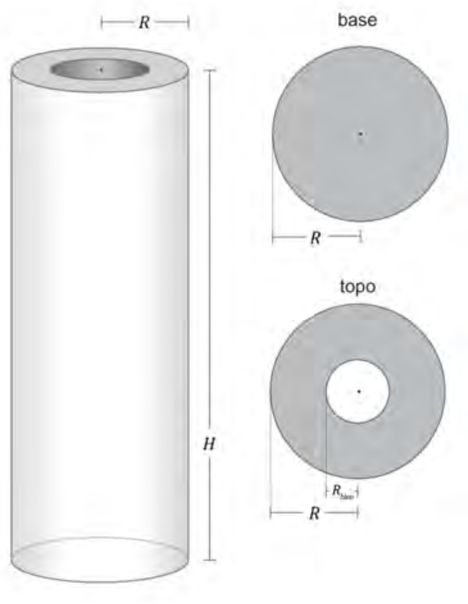

Figura 2: Esquema da geometria da embalagem do Modelo 1

As dimensões medidas da embalagem do Shampoo são aproximadamente:

$H = 17,0000$cm

$R = 2,5465$cm

$R_{bico} = 1,0000$cm

Além disso, a superfície lateral da embalagem é um retângulo de dimensão $2\pi R \times H$, conforme a Figura 3.

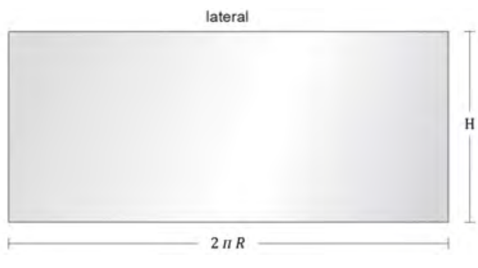

Figura 3: Esquema da superfície lateral da embalagem do Modelo 1

O volume (V) e a área superficial total (A_T) podem ser calculados utilizando fórmulas clássicas da matemática. V é o volume de um cilindro, e a área total corresponde à soma da área lateral com a área da base e com a do topo, ou seja:

$$V = \pi R^2 H$$
$$A_T = 2\pi RH + \pi R^2 + \pi(R^2 - R^2_{bico})$$

O volume ($V_{Shampoo}$) e a área total ($A_{Shampoo}$), calculados com as fórmulas acima, são aproximadamente:

$$V_{Shampoo} = 346,3212\text{cm}^3$$
$$A_{Shampoo} = 309,6021\text{cm}^2$$

O objetivo na otimização de material é determinar, se possível, dimensões r (raio) e h (altura) de um cilindro que tenha as mesmas condições geométricas e o mesmo volume da embalagem do Shampoo de Copaíba ($V_{Shampoo}$) e cuja área superficial seja a mínima possível.

O problema de otimização que buscamos resolver, aparece de forma simplificada em diversos livros de Cálculo Diferencial e Integral (por exemplo, em Stewart (2016)), na aplicação da derivada para otimização.

Podemos modelar o problema de otimização para as variáveis r e h como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & (2\pi rh + \pi r^2 + \pi(r^2 - R^2_{bico})) \\ \text{Sujeito a} \quad & \pi r^2 h = V_{Shampoo} \end{aligned}$$

Utilizamos a rotina de minimização *fmincon* do software Matlab® para resolver o problema de otimização, obtendo os seguintes valores ótimos, para o raio ($r = R_{otimo}$) e a altura ($h = H_{otimo}$):

$$R_{otimo} = 3,8057\text{cm}$$
$$H_{otimo} = 7,6114\text{cm}$$

As dimensões ótimas estão apresentadas na Figura 4.

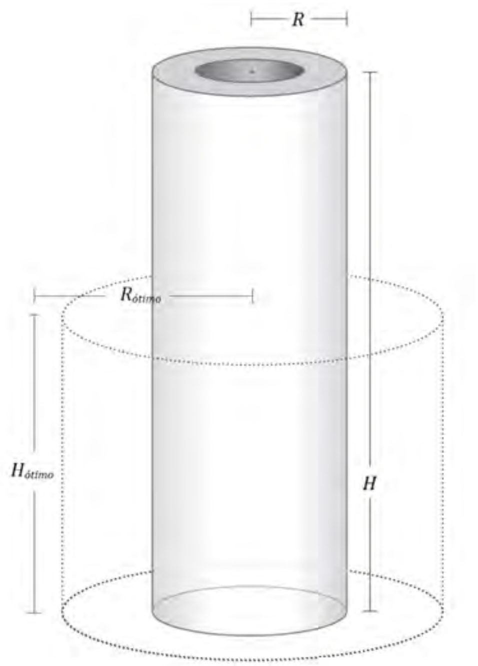

Figura 4: Esquema da geometria da embalagem do Modelo 1, com as dimensões originais (R e H) e as dimensões otimizadas (R_{otimo} e H_{otimo}) que minimizam a área lateral

O volume (V_{otimo}) e a área (A_{otimo}) com as dimensões ótimas são:

$$V_{otimo} = 346,3212\text{cm}^3$$
$$A_{otimo} = 269,8613\text{cm}^2$$

Conforme esperado, o volume ótimo V_{otimo} é o mesmo da embalagem do Shampoo de Copaíba, $V_{Shampoo}$, e a área ótima A_{otimo} é inferior à do Shampoo de Copaíba, $A_{Shampoo}$. De fato, a redução na área é da ordem de $12,84\%$, o que pode significar a redução, desta mesma ordem, na quantidade de material plástico necessário para a produção da embalagem.

Claro que outros fatores também podem influenciar na decisão do *design* da embalagem, mas a escolha das proporções adequadas pode afetar significativamente no gasto de material e consequentemente na produção de resíduos.

2.2 Otimização da área Superficial de uma embalagem do Modelo 2

Consideramos como Modelo 2 uma embalagem com o formato geométrico de um cilindro prensado no topo, como a embalagem do Desodorante Erva Doce da marca Natura, apresentado na Figura 5.

Figura 5: Produto utilizado como Modelo 2 de embalagem para otimização

Consideramos o modelo simplificado da embalagem sem a tampa e sem o bico de vazão. Supomos que o modelo consiste em um cilindro de altura H e raio R, com área reservada à prensa no topo, de altura L. Consideramos, ainda, que a base é formada por um anel circular, de raio maior R e raio menor R_{bico} , onde estaria o bico de vazão, conforme apresentado na Figura 6.

As dimensões medidas da embalagem são aproximadamente:

$H = 10,1000\text{cm}$

$L = 0,6000\text{cm}$

$R = 2,0054\text{cm}$

$R_{bico} = 1,6075\text{cm}$

Além disso, a lateral é um retângulo de dimensão $2\pi R \times (H + L)$, conforme a Figura 7.

Neste caso, apesar de interpretarmos a geometria da embalagem a partir de um cilin-

Figura 6: Produto utilizado como Modelo 2 de embalagem para otimização

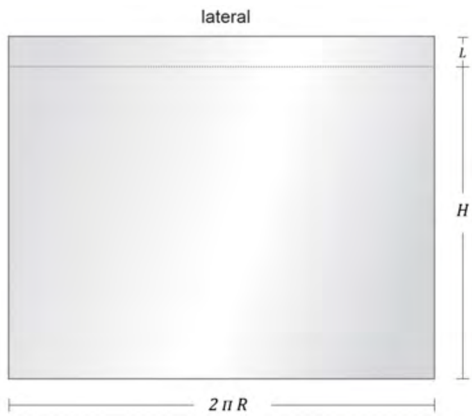

Figura 7: Esquema da superfície lateral da embalagem do Modelo 2

dro, como o Modelo 1, a estrutura resultante é bem mais complexa do ponto de vista de equações matemáticas.

Mesmo com esta complexidade da estrutura, a área total da superfície (A_T) pode ser facilmente calculada usando fórmulas clássicas da geometria. Ela corresponde à soma da área lateral de um cilindro com a área do anel circular da base, através da fórmula:

$$A_T = 2\pi R(H + L) + \pi(R^2 - R_{bico}^2)$$

No entanto, não existem fórmulas matemáticas prontas para calcular o volume deste tipo de estrutura e, portanto, precisa ser calculado usando integral.

Para isso, propomos um modelo matemático que descreva a geometria da estrutura, fazendo as seguintes considerações:

- Cada secção transversal, paralela à base, na altura z ($0 \leq z \leq H$) da estrutura, é representada por uma elipse de dimensões a (eixo maior) e b (eixo menor), conforme a Figura 8.

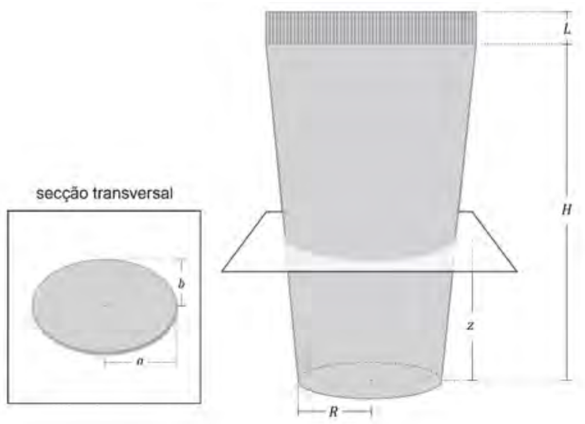

Figura 8: Esquema de uma secção transversal da embalagem do Modelo 2

- Na base, a secção transversal é uma circunferência, ou seja, $a = b = R$ quando $z = 0$.

- Na parte superior da embalagem, a secção transversal é apenas uma linha, devido à prensa, ou seja, $b = R$ quando $z = H$.

- As dimensões b das elipses diminuem linearmente a partir da base, sendo $b = R$ na base ($z = 0$) e $b = 0$ no topo ($z = H$):

$$b(z) = -\frac{R}{H}z + R$$

- Os perímetros das elipses das secções transversais se mantém constantes igual $2\pi R$

- As dimensões a das elipses são determinadas de modo a manter os perímetros constantes.

- Os perímetros das elipses são calculados pela aproximação de Ramanujan (Villarino, 2006):

$$\pi(a+b)\left(1+\frac{3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2)}{10+\sqrt{4-3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}}\right)$$

- As áreas das elipses são calculadas pela fórmula (Stewart, 2016):

$$\pi ab$$

Com isso, o volume (V) da estrutura pode ser calculado pela integral:

$$V=\int_0^H \pi.a(b,z).b(z)dz$$

onde $b(z)=-\frac{R}{H}z+R$ e $a(b,z)$ é solução da equação:

$$\pi(a+b)\left(1+\frac{3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2)}{10+\sqrt{4-3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}}\right)=2\pi R$$

Para o cálculo do volume utilizamos a estratégia de integração numérica pela Regra 1/3 Simpson (Ruggiero, 1996), com o software Matlab®.

Os resultados do cálculo do volume e da área são:

$$V_{Desodorante}=80,5261\text{cm}^3$$

$$A_{Desodorante}=139,3357\text{cm}^2$$

O nosso objetivo na otimização de material é determinar, se possível, dimensões r (raio) e h (altura) de um cilindro prensado que tenha a mesma geometria e o mesmo volume da embalagem do Desodorante de Erva Doce ($V_{Desodorante}$), e cuja área superficial seja a mínima possível.

Podemos modelar o problema de otimização para as variáveis r e h como:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & (2\pi r(h+L)+\pi(r^2-R_{bico}^2)) \\ \text{Sujeito a} & \int_0^H \pi.a(b,z).b(z)dz = V_{Desodorante} \end{array}$$

onde $b(z)=-\frac{r}{h}z+r$ e $a(b,z)$ é solução de da equação:

$$\pi(a+b(z))\left(1+\frac{3\left(\frac{a-b(z)}{a+b(z)}\right)^2)}{10+\sqrt{4-3\left(\frac{a-b(z)}{a+b(z)}\right)^2}}\right)=2\pi R$$

Utilizamos a rotina de minimização *fmincon* do software Matlab® para resolver o problema de otimização, obtendo os seguintes valores ótimos para o raio ($r = R_{otimo}$) e a altura ($h = H_{otimo}$):

$$R_{otimo} = 3,2486\text{cm}$$
$$H_{otimo} = 3,8486\text{cm}$$

As dimensões ótimas estão apresentadas na Figura 9.

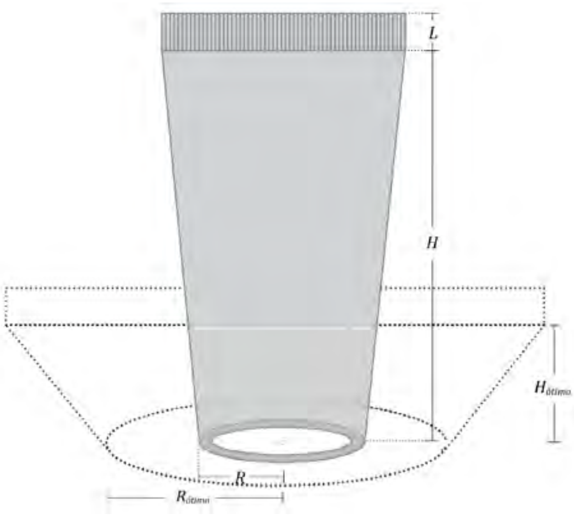

Figura 9: Esquema da geometria da embalagem do Modelo 2, com as dimensões originais (R e H) e as dimensões otimizadas (R_{otimo} e H_{otimo}) que minimizam a área lateral

O volume (V_{otimo}) e a área (A_{otimo}) do cilindro prensado com as dimensões ótimas são:

$$V_{otimo} = 80,5261\text{cm}^3$$
$$A_{otimo} = 115,8406\text{cm}^2$$

Conforme esperado, o volume, V_{otimo}, é o mesmo da embalagem do Desodorante de Erva Doce, $V_{Desodorante}$, e a área A_{otimo} é inferior à do Desodorante de Erva Doce, $A_{Desodorante}$.

A redução na área é da ordem de $16,87\%$, o que pode significar a redução na quantidade de material plástico necessário para a produção da embalagem.

No entanto, apesar da excelente redução, acreditamos que a estrutura ótima pode não ser viável como embalagem.

Por isso, limitamos o potencial de otimização, incluindo uma restrição que, a nosso ver, assegura sua usabilidade.

Foi imposta uma restrição de raio máximo com $2,5$cm. Isso gera um novo modelo de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & (2\pi r(h+L) + \pi(r^2 - R_{bico}^2)) \\ \text{Sujeito a} & \begin{cases} \int_0^H \pi.a(b,z).b(z)dz = V_{Desodorante} \\ r \leq 2,5 \end{cases} \end{array}$$

onde $b(z) = -\frac{r}{h}z + r$ e $a(b,z)$ é solução de da equação:

$$\pi(a+b(z))\left(1 + \frac{3\left(\frac{a-b(z)}{a+b(z)}\right)^2)}{10+\sqrt{4-3\left(\frac{a-b(z)}{a+b(z)}\right)^2}}\right) = 2\pi R$$

Neste caso, obtivemos os seguintes valores ótimos para o raio ($r = R_{otimo}$) e a altura

$(h = H_{otimo})$:

$$R_{otimo} = 2,5000\text{cm}$$
$$H_{otimo} = 6,4986\text{cm}$$

O volume (V_{otimo}) e a área (A_{otimo}) com as dimensões ótimas são:

$$V_{otimo} = 80,5261\text{cm}^3$$
$$A_{otimo} = 123,0221\text{cm}^2$$

A redução na área, neste caso, é da ordem de $11,71\%$, o que pode significar a redução, desta mesma ordem, na quantidade de material plástico necessário para a produção da embalagem.

Claro, que outros fatores também podem influenciar na decisão do *design* da embalagem, mas a escolha das proporções adequadas pode afetar significativamente no gasto de material e, consequentemente, na produção de resíduos.

3 Análise da Usabilidade das Embalagens Otimizadas

Apesar de conseguirmos obter uma redução na área superficial, mantendo a geometria e o volume original das embalagens estudadas, é importante analisar essas embalagens obtidas, do ponto de vista de usabilidade e possivelmente de *design*.

Como não somos *designers*, deixamos em aberto a possibilidade de um trabalho futuro vir complementar esta análise, mas propomos algumas sugestões complementares para manter a viabilidade da proposta de modelo otimizado das embalagens.

3.1 Análise de Usabilidade das Embalagem Ótima do Modelo 1

Para obtermos a otimização da área superficial da embalagem do Modelo 1, não consideramos a tampa do produto e mantivemos o mesmo vão original, supondo que a mesma tampa seria recolocada no centro do topo. Com isso, o protótipo da nova embalagem do produto está simulado na Figura 10.

Figura 10: Embalagem do Modelo 1 com as dimensões originais e com as dimensões otimizadas (área superficial mínima)

Para manter a função do *flip* de abertura da tampa, e a identidade do shampoo, sugerimos deslocar o bico de vazão, hoje no centro, aproximando-a da borda, conforme apresentado no Figura 11.

Esta alteração mantém a usabilidade e não interfere nos cálculos realizados anteriormente, ou seja, a caraterística ótima de área superficial mínima, com mesmo volume original, está mantida.

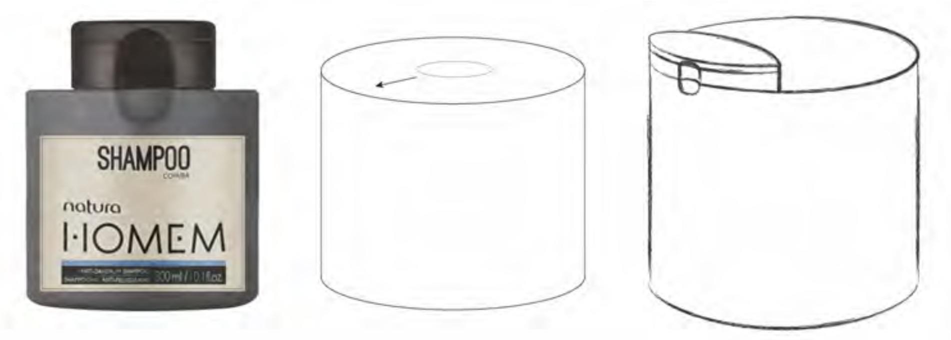

Figura 11: Embalagem do Modelo 1 com as dimensões otimizadas e alteração na posição do flip de abertura

3.2 Análise de Usabilidade das Embalagem Ótima do Modelo 2

Para determinarmos as dimensões da embalagem do Modelo 2 otimizada, fizemos a inclusão de uma restrição específica para que o raio seja no máximo $2,5$cm. Esta restrição, apesar de limitar o potencial de otimização, torna o modelo viável em termos de usabilidade, conforme discutimos anteriormente. Com isso, o protótipo da nova embalagem do produto está simulada na Figura 12.

Figura 12: Embalagem do Modelo 2 com as dimensões originais e com as dimensões otimizadas (área superficial mínima)

4 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma estratégia de otimização para calcular as dimensões de altura e raio de dois modelos de embalagens de cosméticos, de modo a minimizar a sua área superficial, mantendo o volume e a forma geométrica original. Com isso, a quantidade de matéria-prima utilizada para a produção da embalagem, assim como a quantidade de descarte, será reduzida.

Escolhemos dois modelos de embalagens bastante usuais no mercado: uma cilíndrica, o shampoo copaíba da marca Natura, e outra do tipo cilindro prensado, o desodorante de Erva Doce da marca Natura.

Para esses modelos conseguimos uma redução da ordem de $12,84\%$ na medida da área superficial no Modelo 1 e da ordem de $11,71\%$ na medida da área superficial no Modelo 2.

Comparadas às embalagens enviadas para reciclagem no Brasil, as reduções obtidas representam um volume aproximado 9 vezes maior de embalagens não produzidas, e que não viraram lixo, do que o volume reciclado em seu formato original, baseado em dados da Revista Fapesp, 2019. Representam, também cerca de 4 toneladas a menos de plástico descartado na vida, a cada 1000 pessoas, segundo cálculos do Footprint Calculator, 2019.

A proposta apresentada pode ser estendida também a outros modelos de embalagem, inclusive em outros setores de mercado.

Referências

[1] MATLAB. Versão R2015A. Mathworks, 2015. .

[2] PLASTIC FOOTPRINT CALCULATOR, `https://www.omnicalculator.com/ecology/plastic-footprint` .Acesso em 28/11/2019.

[3] REVISTA FAPESP, Planeta Plástico. `https://revistapesquisa.fapesp.br/2019/07/08/planeta-plastico/` . Acesso em 28/11/2019

[4] RUGGIERO, M.A.G.; Lopes, V.L.R. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

[5] STEWART, James. **Cálculo volume 1 e 2**. 8a. edição. São Paulo: Cengage Learning, 2016

[6] VILLARINO, Mark B., **A note on the accuracy of Ramanujan's approximative formula for the perimeter of an ellipse**. JIPAM Journal of Inequalities in Pure & Applied Mathematics [electronic only] (2006). Acesso em 26/11/2019

[7] `https://www.natura.com.br/`. Acesso em 16/11/2019

Apêndice 1: Rotinas de otimização em Matlab para o Modelo 1

```
% Minimizacao da área da embalagem do shampoo copaíba, com restrição de
%    volume constante
% Figura geometrica:
%    cilindro sem tampa, fechado na base com circulo de raio R e fechado no
%    topo com anel circular de raio maior R e raio menor R_bico
function minimiza_cilindro(C,H)
%Parâmetros de entrada:
%    C: perímetro do cilindro
%    H: altura do cilindro (sem a prensa e sem a a tampa)
% Variáveis de otimização:
%    r: raio maior da base
%    h: altura do cilindro
% Medidas dadas:
%    Perimetro do cilindro: C=16;
%    Raio maior: R= C/2pi
%    Raio menor da base (encaixe do bico circular de vazao):raio_bico=1
%    Altura do cilindro (sem tampa): H=17;
%medidas da embalagem
perimetro=C;
R=C/(2*pi);
R_bico=1;
area=2*pi*R*H + pi*R^2 + pi*(R^2-R_bico^2);
vol=pi*R^2*H;
% Otimização
xmininі=[R,H];
```

```
lb=[0,0];
ub=[3*R;3*H];
[xmin,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fmincon(@(xmin) area_total(xmin(1),xmin(2),
R_bico),xminini,[],[],[],[],lb,ub, @(xmin) volume_cilindro(xmin(1),xmin(2),
vol));
[volcp_ineq,volcp_eq] = volume_cilindro(xmin(1),xmin(2),vol);
%Saida
disp('**********************************************')
disp('Embalagem (R, H area e volume)')
disp(['R:' sprintf('%5.4f' ,R) ' H: ' sprintf('%5.4f',H)...
        ' Area(cm2): ' sprintf('%5.4f' ,area) ...
        ' Volume(cm3): ' sprintf('%5.4f' ,vol)])

volume=volcp_eq+vol;
disp('Solução da otimizacao (R, H area e volume)')
disp(['r:' sprintf('%5.4f' ,xmin(1)) ' h: ' sprintf('%5.4f',xmin(2))...
        ' Area(cm2): ' sprintf('%5.4f' ,FVAL) ...
        ' Volume(cm3): ' sprintf('%5.4f' ,volume)])
%-------------------------------------------------------
function acp = area_total(r,h,R_bico)
%area da embalabem: área lateral, mais área da base, mais área do anel
%circular do topo
 acp= 2*pi*r*h + pi*r^2 + pi*(r^2-R_bico^2);
end
%-------------------------------------------------------
function [volcp_ineq,volcp_eq] = volume_cilindro(r,h,vol)
%restrição volume: volume-vol=0
volcp_ineq = [];
```

```
volcp_eq = pi*r^2*h-vol;
end
end
```

Apêndice 2: Rotinas de otimização em Matlab para o Modelo 2

```
% Minimizacao da área de embalagem do desodorante erva doce, considerando a
%    restrição de volume constante
% Figura Geométrica:
%     cilindro prensado no topo e fechado com um anel na base (para
%     encaixe do bico circular de vazao, com raio maior R e raio menor R_bico
function minimiza_cilindro_prensado (C,H)
%Parâmetros de entrada:
%    C: perímetro do cilindro
%    H: altura do cilindro (sem a prensa e sem a a tampa)
% Variáveis de otimização:
%    r: raio maior da base
%    h: altura do cilindro
% Medidas dadas:
%     Perimetro do cilindro: C=12.6;
%     Raio maior: R= C/(2pi)=2.0054;
%     Raio menor (para bico de vazão): R_bico=10.1/(2pi)=1.6075
%     Altura cilindro(sem prensa e sem tampa): H=10.1;
%     Altura da prensa: L=0.6;
%medidas da embalagem
perimetro=C;
L=0.6;
```

```
R_bico=1.6075;

R=C/(2*pi);

area=2*pi*R*(H+L) + pi*(R^2-R_bico^2);

%Calculo do volume

[vol_ineq,vol_eq]=volume_cilindro_prensado(R,H,0);

vol=vol_eq;

%Otimização

xminini=[R,H];

lb=[0,0];

ub=[3*R;3*H];

[xmin,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fmincon(@(xmin) area_total(xmin(1),

xmin(2),L,R_bico),xminini,[],[],[],[],lb,ub,

@(xmin) volume_cilindro_prensado(xmin(1),xmin(2),vol));

[volcp_ineq,volcp_eq] = volume_cilindro_prensado(xmin(1),xmin(2),vol);

%Saida:

disp('*********************************************')

disp('Embalagem (R, H area e volume)')

disp(['R:' sprintf('%5.4f' ,R) ' H: ' sprintf('%5.4f',H)...

        ' Area(cm2): ' sprintf('%5.4f' ,area) ...

        ' Volume(cm3): ' sprintf('%5.4f' ,vol)])

volume=volcp_eq+vol;

disp('Solução da otimizacao (R, H area e volume)')

disp(['r:' sprintf('%5.4f' ,xmin(1)) ' h: ' sprintf('%5.4f',xmin(2))...

        ' Area(cm2): ' sprintf('%5.4f' ,FVAL) ...

        ' Volume(cm3): ' sprintf('%5.4f' ,volume)])

%-------------------------------------------------------

function acp = area_total(r,h,L,R_bico)

%area da embalagem: área lateral mais área do anel circular da base
```

```
    acp= 2*pi*r*(h+L) + pi*(r^2-R_bico^2);
end
%-------------------------------------------------------
function [volcp_ineq,volcp_eq] = volume_cilindro_prensado(r,h,vol)
%restrição de volume: volume-vol=0
%calculo do volume por integral das áreas das elipse
perimetro = 2*pi*r;
for i=1:151
    z(i)=h/150*(i-1);
    eB(i)=eixoB(z(i),r,h);
    eA(i)=fsolve(@(x) FuneA(x,eB(i),perimetro),0.1);
    AS(i)= pi*eB(i)*eA(i); %área da elipse de eixos eA e eB
end
volcp_ineq = r-2.5;
%Integral pela Regra 1/3 Simpson:
integra=0;
for i=1:2:149
   integra=integra + (h/150)/3*(AS(i)+4*AS(i+1)+AS(i+2));
end
volcp_eq = integra-vol;
%-------------------------------------------------------
function FeA = FuneA(eA,eB, perimetro)
   % Aproximação de Ramanujan para o perimetro da elipse de eixos eA e eB
   aux=((eA-eB)/(eA+eB))^2;
   FeA = pi*(eA+eB)*(1+3*aux/(10+sqrt(4-3*aux)))-perimetro;
end
%-------------------------------------------------------
function eB = eixoB(z,r,h)
```

```
% cáculo do eixo eb do cilindro em função da altura z do corte transversal
    eB = -r/h*z+r;
end
end
end
```